Visualización de Lugares Geométricos con GeoGebra

FERREYRA, Nora
noraf@exactas.unlpam.edu.ar
LORENZO, Marcelo
mlorenzo@exactas.unlpam.edu.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa

Resumen

Dentro de la matemática, creemos que la Geometría es el área que ofrece mayores posibilidades a la hora de experimentar, mediante materiales adecuados, en torno a sus métodos, conceptos y propiedades. Por otra parte, diferentes autores señalan, como una de las causas del fracaso en su comprensión, la introducción de manera prematura a la Geometría formal, sin permitir que los estudiantes desplieguen una exploración experimental suficiente en torno de las propiedades de las figuras y una entrada gradual a la terminología formal apropiada.

Como docentes del Profesorado en Matemática de la UNLPam, preocupados por la enseñanza de la Geometría en todos los niveles, tratamos de diseñar actividades que permitan, a través de la manipulación y la puesta en juego de todos los sentidos, facilitar la incorporación de algunos modelos abstractos. Para ello, explotamos la potencialidad de un software de geometría dinámica considerando que estimula en gran medida un pensamiento “investigativo” ya que no sólo constituye un medio poderoso para verificar conjeturas verdaderas, sino que también es de gran utilidad para construir contraejemplos de conjeturas falsas.

En este trabajo se resume la adaptación de actividades previstas en contextos concretos (con lápiz, papel, varillas, cartón y otros), a las nuevas tecnologías disponibles en la actualidad.

Concretamente, se discuten propuestas didácticas cuya solución remite a determinados Lugares Geométricos (cardiodes, epicicloides, hipocicloides), a través del uso del software GeoGebra. Se pone en evidencia la utilidad de este recurso tecnológico dada la dificultad del tratamiento de estas temáticas de manera exclusivamente simbólica y algebraica.

Palabras clave: GeoGebra - Cardioide - Hipocicloide - Teorema de Copérnico

Introducción

En coincidencia con los trabajos de Godino (2003), "*las aplicaciones matemáticas tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Si queremos que nuestros alumnos valoren su papel, es importante que los ejemplos y situaciones que mostramos en clase hagan ver, de la forma más completa posible, el amplio campo de fenómenos que las matemáticas permiten organizar*".

Dentro de la matemática, creemos que la Geometría es el área que ofrece mayores posibilidades a la hora de experimentar, mediante materiales adecuados, en torno a sus métodos, conceptos y propiedades. Sin embargo, diferentes autores señalan, como una de las causas de las dificultades en su comprensión a la introducción de manera prematura a la Geometría formal, sin permitir que los estudiantes desplieguen una exploración experimental suficiente en torno de las propiedades de las figuras y una entrada gradual a la terminología formal apropiada.

El desarrollo de procesos que permitan el dominio de conceptos y procedimientos y las competencias para observar regularidades, verificar conjeturas y estimar resultados, darán sentido y significación al aprendizaje de la Geometría. Es por ello que juzgamos importante realizar previamente observaciones, hipótesis y conjeturas a partir de lo observado.

En este sentido las herramientas informáticas juegan un rol importante pues, si bien el uso de ellas no permite al alumno validar o demostrar, son un recurso para conjeturar propiedades de los objetos, conjeturas difíciles de lograr cuando se trabaja con los recursos tradicionales. Y sabemos que el planteamiento de conjeturas es una de las tareas principales de la matemática.

Como docentes del Profesorado en Matemática de la UNLPam reflexionamos sobre nuestras prácticas, analizando los problemas detectados y buscando estrategias de intervención para su resolución. La currícula de formación inicial de los profesores no fomenta, experiencias de construcción y experimentación como base para el descubrimiento y la elaboración de conjeturas, sin embargo, en el desempeño profesional de esos futuros docentes, se espera que sean capaces de organizar y gestionar una clase centrada en procesos de construcción y resolución de problemas.

Se sabe que los estudiantes tienen tendencia a reproducir, en su práctica profesional, su propio aprendizaje como alumnos, lo cual renueva nuestro compromiso como formadores de docentes para tratar de proponer situaciones que les permitan vivir la experiencia de aprender algunos saberes a partir de actividades de ese tipo.

Si bien el conocimiento que vive en la universidad no es el mismo que el que reconstruirán en sus futuras prácticas docentes, sí lo es la metodología de trabajo que se puede llevar adelante.

Como ya hemos expresado, en distintos trabajos se mencionan diferentes posibles causas del mal desempeño de los alumnos en geometría. Por ejemplo, muchos alumnos no desarrollan habilidades de visualización que son un prerrequisito importante para el éxito en geometría.

Suele suceder que algunos docentes simplemente eviten la exploración informal de relaciones geométricas por construcción y medición con papel y lápiz, ya que consumen demasiado tiempo (y son relativamente inexactas). Otro problema es que esas figuras construidas son "estáticas"; uno tiene que redibujar la figura o ser capaz de visualizar cómo podría cambiar de forma. Sin embargo todo esto ha cambiado con el desarrollo de algunos paquetes de software para geometría.

Estos programas de geometría fueron diseñados con la intención específica de poner a disposición de los estudiantes un ambiente para la exploración experimental de la geometría plana elemental. En el pasado uno tenía que dibujar las configuraciones geométricas en una hoja de papel, obteniendo así una representación más o menos exacta pero fija, y por lo tanto limitando en extremo la exploración. En tales programas las figuras geométricas pueden construirse por medio de acciones y en un lenguaje que son muy próximos a los que se usan en el universo familiar de " papel y lápiz”. En contraste con la construcción de papel y lápiz, la geometría dinámica es precisa y es muy fácil y rápido realizar construcciones complejas para luego modificarlas.

Desarrollo

A partir del marco teórico expuesto, en nuestro desempeño como docentes del Profesorado en Matemática, tratamos de diseñar actividades que permitan, a través de la manipulación y la puesta en juego de todos los sentidos, facilitar la incorporación de algunos modelos abstractos. Se trata de experiencias previstas originalmente en contextos concretos (con lápiz, papel, varillas, cartón, entre otros) que, sin embargo presentaban inconvenientes en la verificación y cuidadosa exposición de los resultados, cuestión que actualmente puede ser resuelta con el uso de nuevas tecnologías. Para ello, explotamos la potencialidad de un software de geometría dinámica considerando que estimula en gran medida un pensamiento “investigativo” ya que no sólo constituye un medio poderoso para verificar conjeturas verdaderas, sino que también es de gran utilidad para construir contraejemplos de conjeturas falsas.

Acerca del software

Como ya mencionamos, las construcciones y mediciones con papel y lápiz tienen muchas desventajas. Una de las principales es que mediante ellas es difícil conjeturar en problemas como los que nos ocupan. Los materiales del tipo “monedas” o el “cardiógrafo” tienen a nuestro criterio esas desventajas y se corre el riesgo de que los lugares geométricos surjan por una imposición del docente más que por una visualización de los alumnos.

Programas de geometría dinámica como el GeoGebra en cambio, mediante herramientas como “ver la traza”, permiten visualizar perfectamente el recorrido de un punto como el de los problemas planteados, dejando a la geometría analítica la prueba formal de estas conjeturas. En contraste con la construcción de papel y lápiz, la geometría dinámica es precisa y es muy fácil y rápido realizar construcciones complejas para luego modificarlas.

Probablemente la característica más apreciada de la geometría dinámica es su potencial para estimular (re-introducir) la experimentación y esa clase de "investigación" orientada a los alumnos. En un enfoque de tipo de investigación, se introduce tempranamente a los alumnos en el arte de proponer problemas y se les dan suficientes oportunidades para explorar, conjeturar, refutar, reformular y explicar. (Chazan, 1998).

El software de geometría dinámica estimula en gran medida esta clase de pensamiento ya que no solamente constituye un medio poderoso para verificar conjeturas verdaderas, sino también es en extremo útil para construir contraejemplos de conjeturas falsas. Entre otras ventajas del programa elegido, además de la utilidad y sencillez de manejo, podemos señalar que es de acceso libre y gratuito.

El desarrollo de los procesos que permitan el dominio de esos conceptos y procedimientos y las competencias para observar regularidades, verificar conjeturas y estimar resultados, darán sentido y significación al aprendizaje de la Geometría.

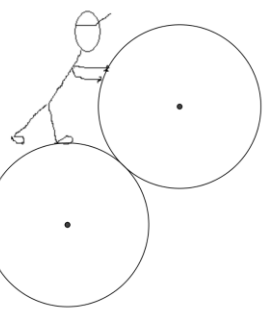
Actividades Propuestas

Concretamente, se discuten propuestas didácticas planteadas en un ambiente de resolución de problemas, cuya solución remite a determinados Lugares Geométricos, a través del uso del software GeoGebra. Presentamos algunas de estas curvas notables, las cuales quedan definidas de modo natural como la trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta o sobre otra circunferencia. A partir de la visualización se propone la modificación de las condiciones iniciales, promoviendo el estudio de las propiedades y la formulación de conjeturas, fundamental en la clase de matemática como base de los procesos de validación.

Se pone en evidencia la utilidad de este recurso tecnológico dada la dificultad del tratamiento de estas temáticas de manera exclusivamente simbólica y algebraica.

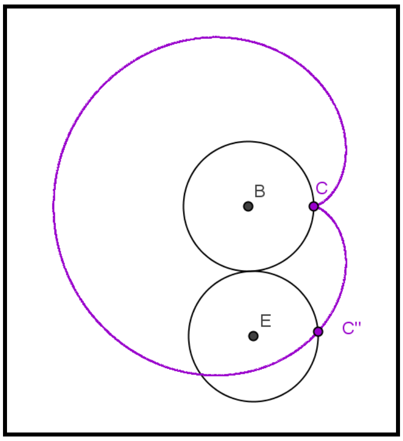
Actividad 1:

Planteamos el problema de una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, por el exterior de otra circunferencia de igual radio que permanece inmóvil podrían ser, por ejemplo, dos monedas de igual valor.



a) ¿Qué trayectoria describirá un punto fijo de la circunferencia rodante?

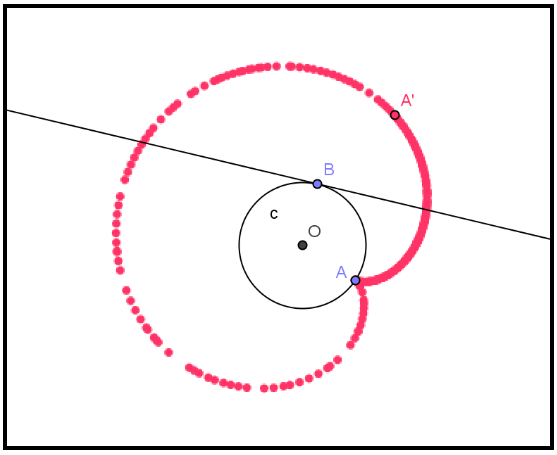
Como sabemos, la curva definida por esta trayectoria es la *cardioide* y la obtención de un gráfico aceptable punto a punto con papel y lápiz, se torna bastante dificultosa. En cambio, con las herramientas "Activa rastro" o "Lugar geométrico" de GeoGebra se visualiza de manera sencilla.



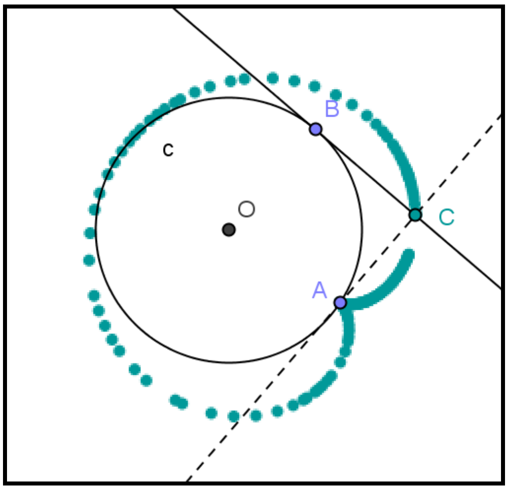
Por otro lado, el análisis posterior de la traza, mediante el reconocimiento de propiedades de las circunferencias surge naturalmente luego de esta visualización.

b) Qué curva describirá el conjunto de puntos simétricos a un cierto punto A de una circunferencia dada en relación a todas las tangentes posibles a la circunferencia?

El gráfico obtenido es:



c) ¿Qué curva determinará el conjunto de pies de las perpendiculares trazadas desde un punto A de una circunferencia a todas las tangentes posibles a ella? Nuevamente, con el uso de GeoGebra se obtiene un gráfico de manera sencilla:

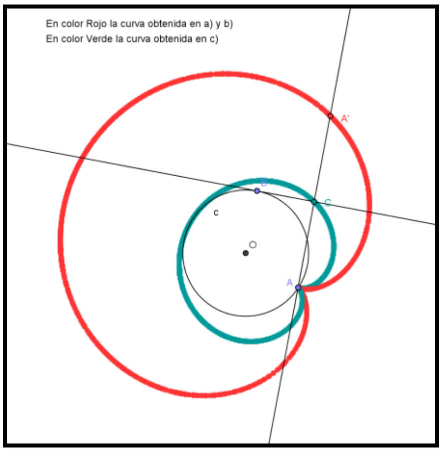


El primer problema planteado fue interpretado fácilmente por los estudiantes y, sobre un papel, parecía fácil su representación. Sin embargo, al no ser una curva demasiado conocida, dudaban acerca de la realidad del dibujo *"…parece una manzana o un corazón…"* (además de haber obtenido cada uno una construcción bastante diferente).

La sugerencia de resolución utilizando el programa generó entusiasmo, sin embargo, se presentó la dificultad de "hacer mover una moneda sobre otra". Fue necesario analizar cómo era el desplazamiento para poder "traducir" el movimiento a los puntos que maneja el Geogebra. Este trabajo incluyó explorar propiedades métricas de la circunferencia, relaciones entre arcos, ángulos y radios, entre otros.

Los dos últimos problemas también se visualizan fácilmente a partir del uso del programa. La equivalencia entre las curvas descriptas en a) y en b) se conjeturaron inmediatamente y, mediante las posibilidades de visualización que ofrece, pudieron argumentar en pos de una demostración.

La relación entre las curvas obtenidas en los casos a) y b) con la resultante en el caso c) se observa en el gráfico y, nuevamente, el hecho de poder contar con abundantes casos puntuales para analizar, propicia la formulación de una conjetura. Efectivamente, al contar con diferentes posiciones de la recta tangente y numerosos puntos se hizo evidente la existencia de una homotecia de razón ½, cuyo centro es el punto A. El hecho de contar con el registro gráfico que provee el programa fue crucial para esta conclusión.

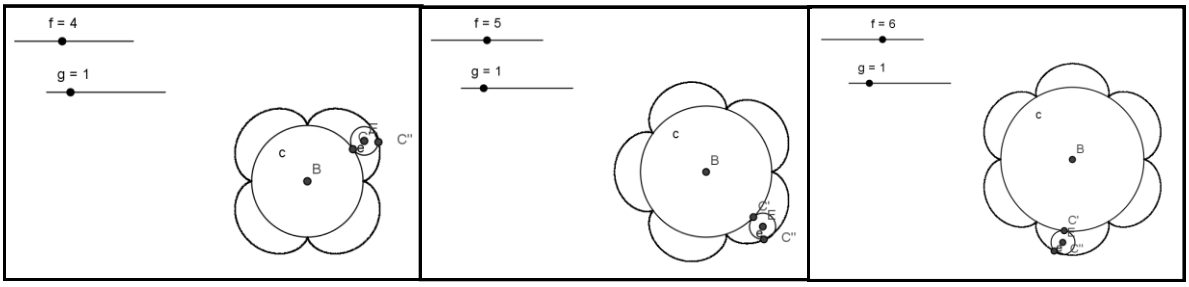


Luego de estos primeros contactos con el problema y, una vez trabajadas diferentes maneras de obtener la *cardioide,* se plantearon situaciones más complejas a partir de modificaciones del problema original.

Actividad 2:

¿Qué pasa si los tamaños de las dos monedas no son iguales?

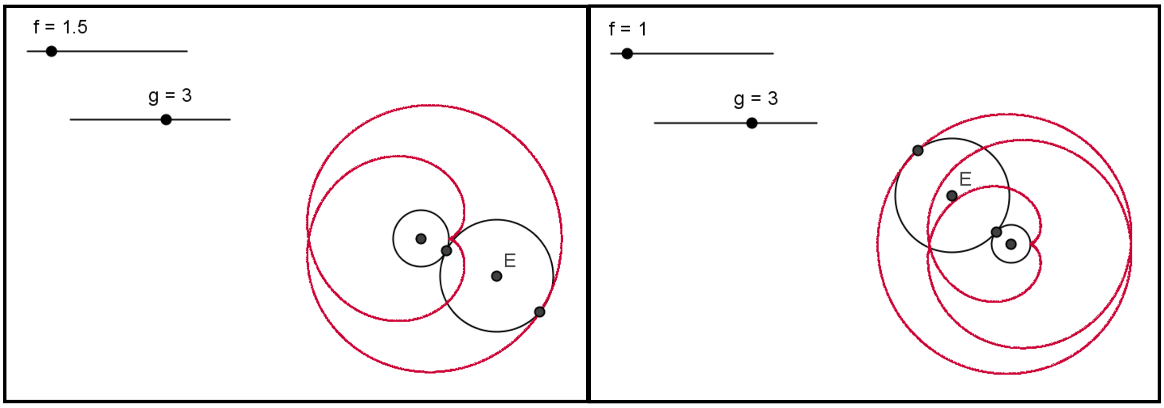
La posibilidad que brinda el programa de modificar los radios, sentidos de giro, ángulos y arcos barridos, etc., permite conjeturar y visualizar inmediatamente casos especiales como los de las figuras, dónde se establece fácilmente que la relación entre los radios da la cantidad de “pétalos” de la flor.



Las preguntas abiertas por este problema, surgen inmediatamente:

- ¿Qué sucede si la relación entre los radios no es un número entero?
- ¿Qué sucede si la circunferencia móvil tiene radio mayor que la inmóvil?

Aparecen otras figuras:



Obtenemos así las *concoides* del círculo o *caracoles de Pascal*

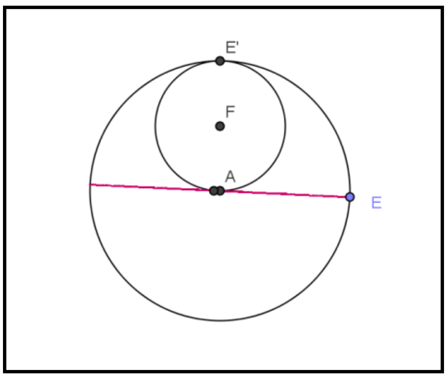
Actividad 3:

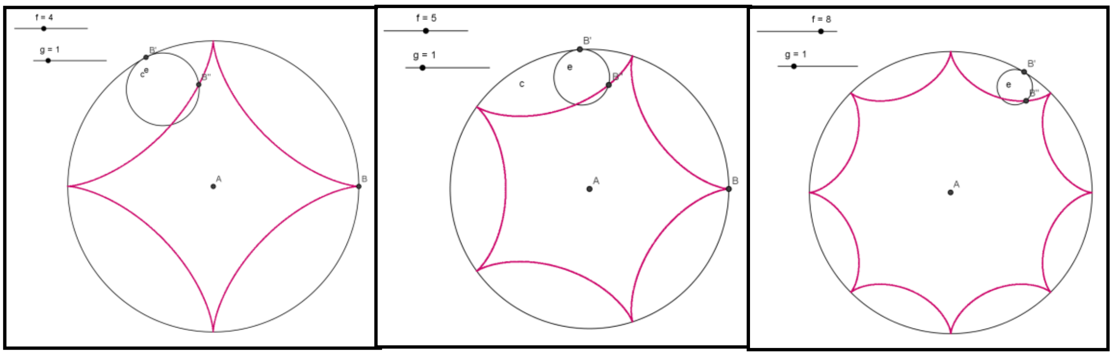
Planteamos finalmente el problema de una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, por el interior de otra circunferencia que permanece inmóvil.

Luego del trabajo anterior, surgió naturalmente la pregunta ¿Cómo son los radios?

Sin usar el programa se pudieron establecer conjeturas basadas en las tareas realizadas.

Con el uso del programa se visualizó si estas conjeturas se verificaban gráficamente. Apareció, por ejemplo, el denominado Teorema de Copérnico para el caso que los radios de las circunferencias están en proporción 2:1. La respuesta gráfica a este problema, como sabemos, es muy simple: el punto se mueve sobre el diámetro de la circunferencia inmóvil. Obtener esta conclusión sin la ayuda de los recursos informáticos implica un manejo de la geometría analítica que los estudiantes no poseen hasta muy avanzados en la carrera, sin embargo el uso del programa permitió conjeturar y visualizar fácilmente este resultado y los correspondientes a diferentes radios.



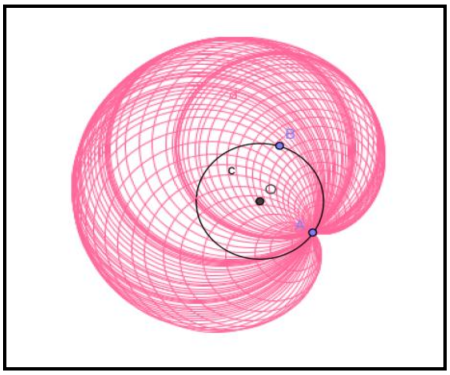


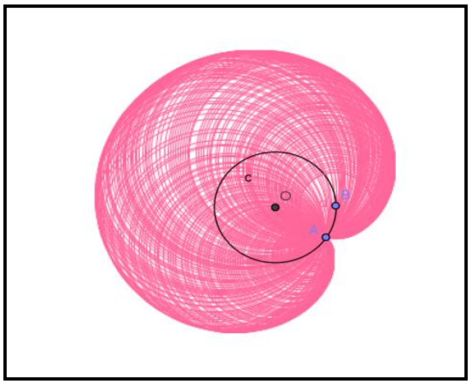
Otras actividades:

Otras actividades pensadas pero no llevadas aún al aula son:

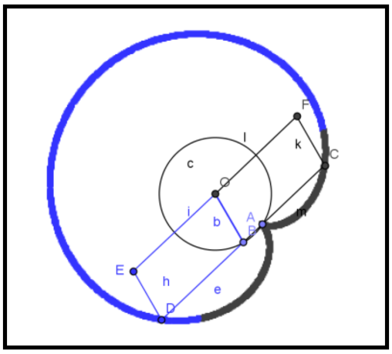
a) ¿Cuál es la región del plano limitada por el conjunto de todas las circunferencias que pasan por el punto A y tienen su centro en la circunferencia dada?

Este problema permite visualizar la cardioide como un nuevo lugar geométrico distinto de los planteados anteriormente.





b) Otra posibilidad interesante que ofreció el programa fue la de recrear lo que Alsina C. (1991) llama el *cardiógrafo*, esto es, un dispositivo con varillas móviles para construir la cardioide. En la figura siguiente lo vemos:



Conclusiones

Coincidimos con los autores que señalan que el desarrollo del software de geometría dinámica, además de reavivar el interés en algunas investigaciones básicas en geometría, ha revitalizado la enseñanza de la geometría.

A diferencia de los enfoques tradicionales, cuando los estudiantes son capaces de producir numerosas configuraciones, las conjeturas geométricas y las posteriores generalizaciones surgen de manera fácil y rápida. Esto permite usar la demostración como herramienta de descubrimiento y no solo como herramienta de verificación en geometría, lo cual contribuye a dotar de significado a la actividad de demostración.

El uso del programa durante el desarrollo de las actividades propuestas permitió a los estudiantes un contacto diferente con la geometría, despertó su interés en el trabajo exploratorio, facilitó el establecimiento de conjeturas y simplificó la producción de generalizaciones.

Por todo lo antedicho se espera que el manejo de nuevas herramientas informáticas promueva a los estudiantes, futuros docentes, a incorporar estrategias de enseñanza acordes con las nuevas tecnologías.

Bibliografía

ALSINA CATALÁ, C. (1991) *Materiales para construir la Geometría*. Editorial Síntesis. Madrid.

JUAN DÍAZ GODINO, CARMEN BATANERO Y VICENÇ FONT (2003) *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje da las Matemáticas para Maestros.* Editorial de la Universidad de Granada. Granada

YvES CHEVALLARD, MARIANNA BOSCH, JOSEP GASCÓN (1997) *Enseñar Matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Editorial Ice- Horsori. Universitat de Barcelona. Barcelona.

BARODY, A. J. (1988) *El pensamiento matemático de los niños*. Ed. Visor. Madrid.

de VILLIERS, M. D. (1998) "*An alternative approach to proof in dynamic geometry*". In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-393). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.